Heimsfræði

1. Undirstöður heimsfræðinnar
2. Rúmfræði 3-víðra rúmsniða
3. Sviðsjöfnurnar
4. Þróun efnis og orku
5. Lausnir á sviðsjöfnunum
6. Rauðvikið og hinn sýnilegi heimur
7. Fjarlægðir í FLRW-heimum
8. Sjóndeildir í FLRW-heimum
9. Heimur de Sitters
10. Heimurinn okkar

Undirstöður heimsfræðinnar

Fjallað verður um FLRW-heimslíkön

F = Friedmann, A.
L = Lemaître, G.
R = Robertson, H.P.
W = Walker, A.G.

(FLRW líkönin eru stundum kölluð FRW- eða RW-líkön og jafnvel Friedmann-líkön.)

* Meginforsenda: Alheimur er ávallt einsleitur og stefnusnauður um sérhvern punkt. (Byggir á athugunum á sýnilegum heimi.)

* Kjör-straumefni: Gerum ráð fyrir að efni alheims sé á formi einsleits og stefnusnauðs gass (straumefnis) með þéttleika sem er alls staðar hinn sami $= \rho$. (Í praxis eru gaseindirnar stórar þyrpingar vetrarbrauta!)

* Útþensla (Hubble og fél. 1929)

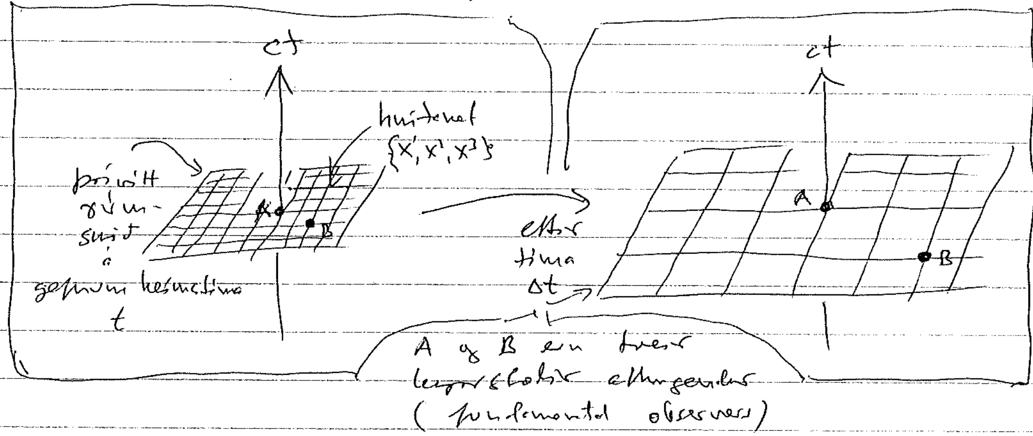
ρ minnkar með tíma:

$\rho = \rho(t)$ svo hægt er að nota ρ til „að fylgjast með tímanum"

$\Longrightarrow$ Hægt er að skilgreina heimstíma t

* Samstiga hnit: Sérhver staður í hinum einsleita og stefnusnauða heimi hefur fast hnit (x^1, x^2, x^3). Athugandi sem er kyrr á ákveðnum stað ~~[illegible]~~ (e. fundamental observer) getur ákvarðað heimstímann á staðnum t (t.d. með því að fylgjast með ρ). Gert er ráð fyrir að allir samstiga athugendur mæli sama heimstíma, t, sem er eiginlegur tími þeirra.

Útþenslan er þá fólgin í vaxandi eiginfjarlægð milli sérhverra tveggja punkta (staða):



* Firð (metric): $\boxed{ds^2 = -c^2 dt^2 + h_{ij}\, dx^i dx^j}$

Notum $(- + + +)$ formerkjaregluna sbr. D'Inverno sem notar $(+ - - -)$

$h_{ij} = h_{ij}(t, \vec{x})$

með $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ samstiga hnit

Stefnusnægta krefst þess að $h_{ij} = h_{ij}(t,\vec{x})$ sé sama fall af heimstíma t fyrir alla athugendur.

Af einsleitni leiðir að sá þáttur h_{ij} sem er óháður tíma sé fasti (þannig breytist ekki), hann sami fyrir alla athugendur.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h_{ij}(t,\vec{x}) = R^2(t)\,\underbrace{\gamma_{ij}(\vec{x})}_{\text{fasti}}}$$

Þessi stærð nefnist skalaþáttur $R = R(t)$ (sem ekki má rugla saman við Ricci-sveigjutöluna $\mathcal{R}$)

Mælirinn verður því:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + h_{ij}\,dx^i dx^j$$

$$= -c^2dt^2 + R^2(t)\gamma_{ij}(\vec{x})\,dx^i dx^j$$

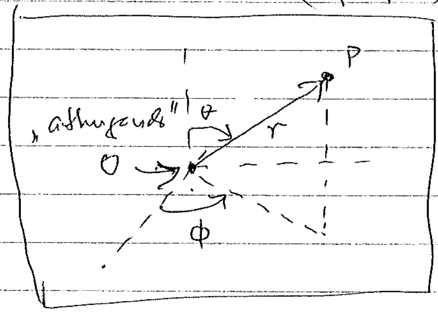
eða

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2(t)\,d\sigma^2}$$

þar sem $\boxed{d\sigma^2 = \gamma_{ij}(\vec{x})\,dx^i dx^j}$

Til að nýta þessa niðurstöðu í reikningum byrjum við á því að festa upphafspunkt hnitakerfisins í einhverjum athuganda (á ákveðnum stað). Staðsetning skiptir ekki máli en venjulega hugsum við okkur að upphafspunkturinn sé hjá okkur.

Stefnusnægðin veldur því að eðlilegast er að nota kúluhnit $(x^1,x^2,x^3) = (r,\theta,\phi)$. Athugið að þetta eru samsvörunarhnit og þau breytast því ekki fyrir gefinn punkt P. Vegna útþenslunnar breytist eiginfjarlægðin milli O og P:



Eiginfjarlægð $= R(t)\underbrace{r}_{\text{fasti}}$

Til samsvörunar við θ og ϕ er r einingalaus stærð. Hins vegar hefur R einhverja lengd.

Í kafla 22.7 í D'Inverno er sýnt fram á að skrifa má

$$\boxed{d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{jafna}\\ 22.34\\ \text{bls. } 318\end{array}\right)$$

þar sem $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ og k er tala sem lýsir sveigju þrívíða rúmsins

þ.e.
- $k = +1 \leftrightarrow$ jákvæð sveigja
- $k = 0 \leftrightarrow$ „flatt rúm" = engin sveigja
- $k = -1 \leftrightarrow$ neikvæð sveigja

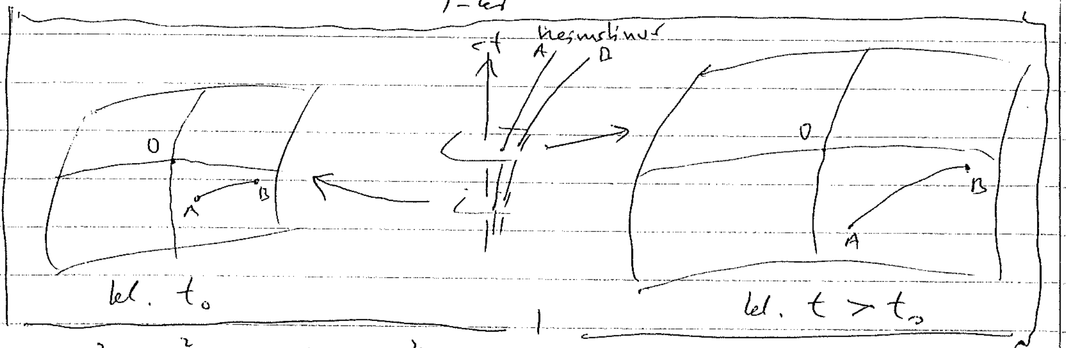
5

Niðurstaðan er því:

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)}$$

Þetta er kallað „Robertson – Walker – mælirinn" eða firðin

$R(t)$ lýsir því hvernig útþenslan þróast með tíma. $d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2$ er óháð tíma.



$$dd_p^2 = R^2(t_0)\,d\sigma^2 = R_0^2\,d\sigma^2$$

$d_p = d_p(t)$ = eiginfjarlægð

$$d_{p0} = d_p(t_0) = \underset{\text{gagnvegur A til B}}{\int dd_p} = R_0 \underset{\text{gagnvegur A til B}}{\int d\sigma} \qquad d = d(t) = \underset{\text{gagnvegur}}{\int_A^B dd_p} = R(t)\underset{\text{gagnvegur}}{\int_A^B d\sigma}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

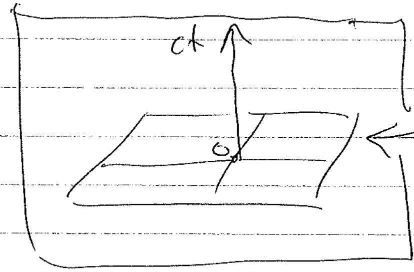
$$\int_A^B d\sigma = \frac{d_{p0}}{R_0} \qquad \int_A^B d\sigma = \frac{d_p(t)}{R(t)}$$

Um eiginfjarlægðir milli tveggja punkta (A og B) sem er gildir:

$$\boxed{d_p(t) = \frac{R(t)}{R_0}\, d_{p0}}$$

6

Rúmfræði þrívíðu rúmsniðanna



þrívítt rúmsnið $\Longleftrightarrow$ Gerð þess ákvarðast af sveigjutölunni k

Rúmfræðileg lýsingin er öll fólgin í

$$\boxed{d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2}$$

Skoðum tilfellin þrjú: $k = 0, \pm 1$

(I) $k = 0$: $\boxed{d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2}$

mælirinn lýsir venjulegu þrívíðu evklíðsku rúmi: $\mathbb{R}^3$

Athugið að k ákvarðar aðeins staðbundna (lókal) sveigju, sem þýðir að grannfræðileg gerð rúmsins getur verið önnur en $\mathbb{R}^3$. T.d. er T^3 (þrítórus) líka flatt rúm í þessum skilningi.

Athugið einnig að þótt þrívíða rúmsniðið þegar $k = 0$ sé flatt þá er tímarúmið óevklíðskt! Skoðum þetta nánar síðar með því að kanna ljóskeilur.

II $\underline{k=+1}$: $d\sigma^2 = \dfrac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2$

Hér er heppilegt að breyta hnitum og innleiða nýtt fjarlægðarhnit χ með

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} \iff r = \sin\chi$$

Þá má skrifa $d\sigma^2$ sem

$$\boxed{d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\Omega^2}$$

Þetta er metrun fyrir S^3: þrívítt yfirborð fjórvíðrar kúlu. Rúmið er þjappað. (Sjá D'Inverno: 22.8 Case 1, bls. 319). Rúm með aðra grannfræðilega gerð geta haft sömu metrun.

III $\underline{k=-1}$: $d\sigma^2 = \dfrac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2$

Hér er gagnlegt að nota breytuna χ sem skil-greind er með

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} \iff r = \sinh\chi$$

$$\Rightarrow \boxed{d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi \, d\Omega^2}$$

(D'Inverno 22.8, Case 3 bls. 321)

Metrun fyrir breiðgerða (hýperbólska) rúmið H^3 sem er óendanlegt. Mörg önnur neikvætt sveigð rúm með aðra grannfræðilega gerð koma einnig til greina, þar á meðal endanleg rúm!

Niðurstöður I, II og III eru stundum teknar saman í eina formúlu:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k^2(\chi)\, d\Omega^2$$

þar sem

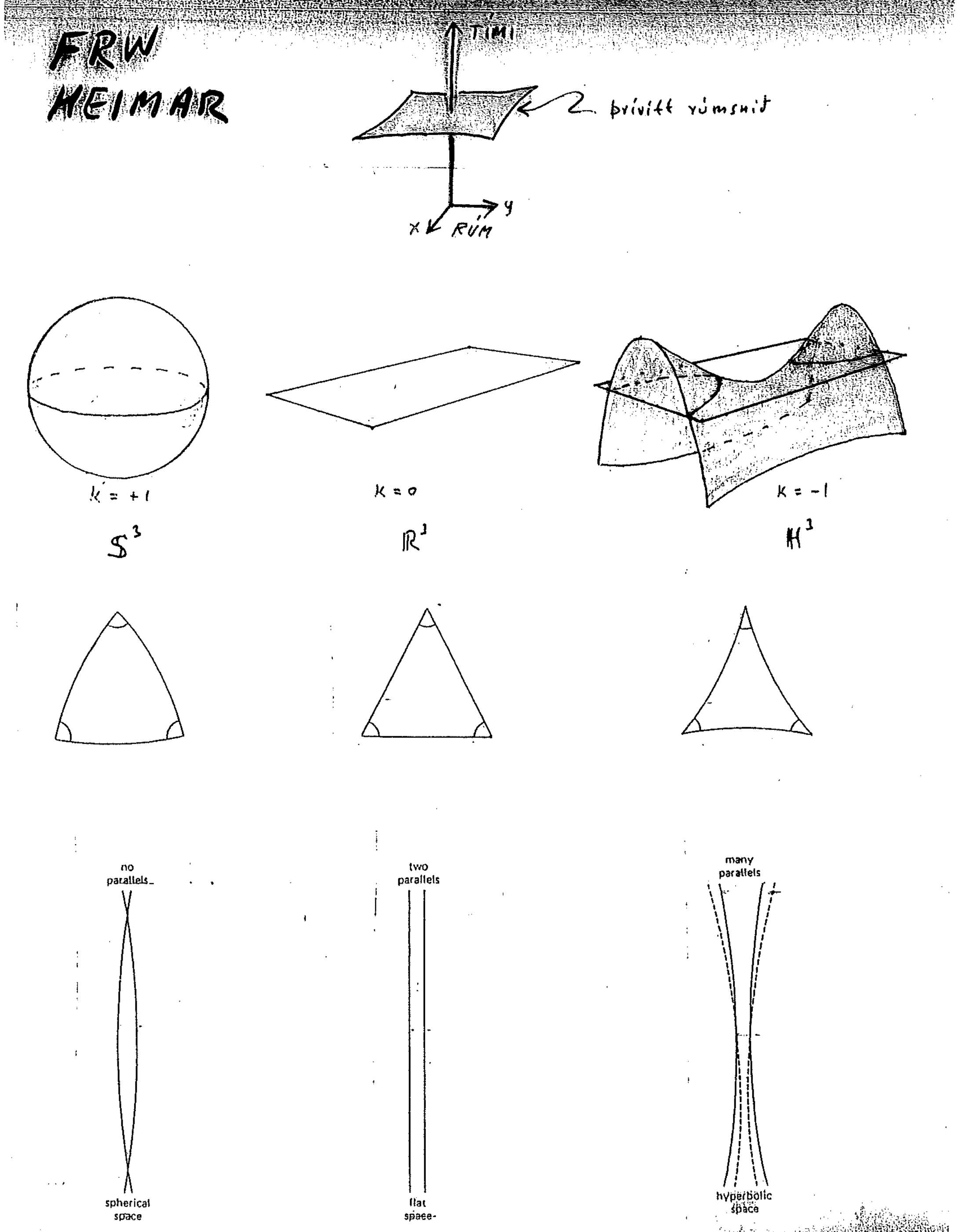
$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k=+1 \; : \; S^3 \\ \chi, & k=0 \; : \; R^3 \\ \sinh\chi, & k=-1 \; : \; H^3 \end{cases}$$

einföldustu grannfræðin

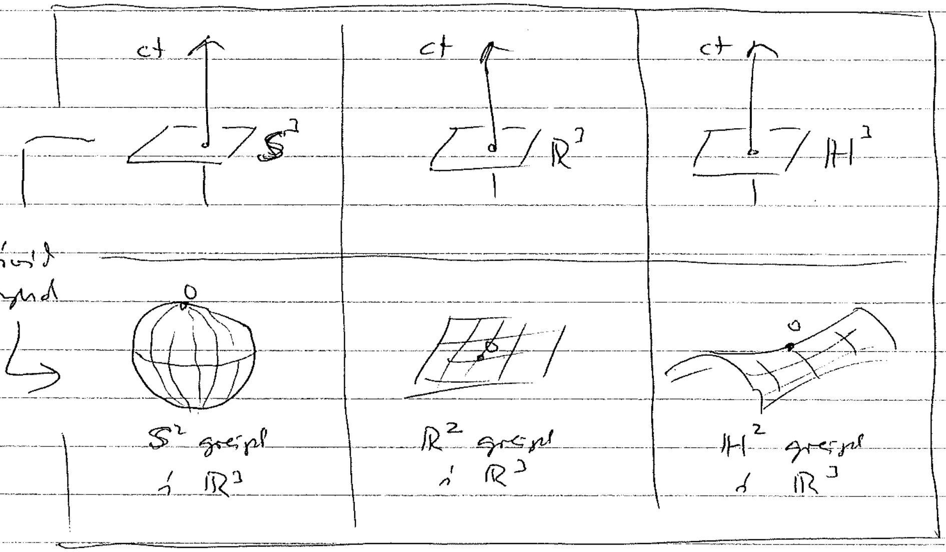
Ath. að χ og þ.a.l. σ eru einingalausar stærðir.

$$r = S_k(\chi)$$
$$\Updownarrow$$
$$\chi = S_k^{-1}(r) = \begin{cases} \sin^{-1}(r) & k=+1 \\ r & k=0 \\ \sinh^{-1}(r) & k=-1 \end{cases}$$

FRW HEIMAR

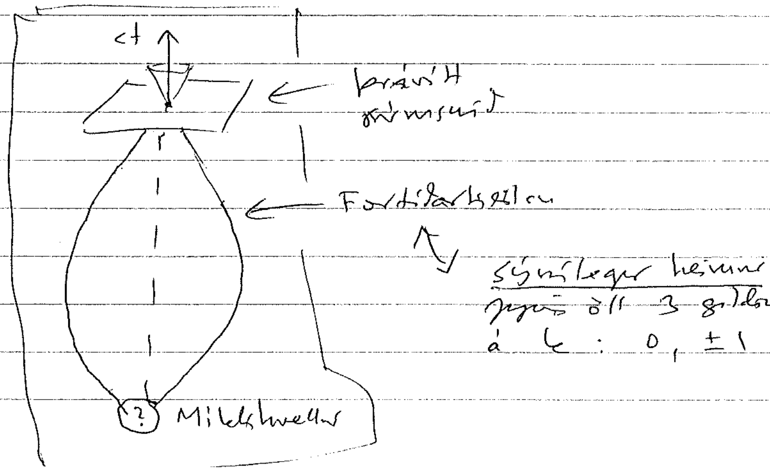


3-víðs rúmsniðin



Athugið

Myndirnar að ofan gefa hugmynd um „rúmheim" á gefnum heimstíma. Það sem athugandi sér er hins vegar hinn sýnilegi heimur:



Sviðsjöfnurnar

Höfum sett mjög sterk skilyrði á $g_{\mu\nu}$-in

$\Longrightarrow$ RW-mælinum:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \underbrace{R^2(t)}\,\underbrace{d\sigma^2}$$

þróun eiginfjarlægða með tíma ákvarðast af þessu falli

Rúmfræði 3-víðu rúmsneiðanna ákvarðast af meginforsendum heimsfræðinnar

Sviðsjöfnur Einsteins eru í þessu tilviki jöfnur sem lýsa ~~fall~~ fallinu $R(t)$ og þ.a.l. þróun heimslíkans. Athugið að $R(t)$ hefur eininguna lengd.

Heppilegt er að innleiða einingalausan skalaþátt $a(t)$ með

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0}$$

Endurskölun: $R_0 r \longrightarrow \overset{\text{ný breyta}}{r}$ ← eining = lengd

$\frac{k}{R_0^2} \longrightarrow k$ ← eining = (lengd)$^{-2}$

gefur

$$\boxed{\underset{(\text{lengd})^2}{ds^2} = -\underset{(\text{lengd})^2}{c^2dt^2} + a^2(t)\left(\underset{(\text{lengd})^2}{\frac{dr^2}{1-kr^2}} + \underset{(\text{lengd})^2}{r^2d\Omega^2}\right)}$$

Sviðsjöfnur Einsteins

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{=\varkappa} T_{\mu\nu}}$$

Höfum Λ innifalið í $T_{\mu\nu}$

Skoðum fyrst $G_{\mu\nu}$ og síðan $T_{\mu\nu}$:

(I) Einstein-þinurinn: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

Byrjum á mælinum:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2dt^2 + \underbrace{\frac{a^2dr^2}{1-kr^2}} + a^2r^2d\theta^2 + a^2r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

(setjum c=1)

$g_{tt} = -1$	$g_{rr} = \frac{a^2}{1-kr^2}$	$g_{\theta\theta} = a^2r^2$	$g_{\phi\phi} = a^2r^2\sin^2\theta$

Nú er $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma = g_{\alpha 0}g^{0\gamma} + g_{\alpha 1}g^{1\gamma} + g_{\alpha 2}g^{2\gamma} + g_{\alpha 3}g^{3\gamma}$

$= 1$

$\Longrightarrow g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}}$ svo við getum lesið $g^{\alpha\alpha}$ ~~beint~~ út úr $g_{\alpha\alpha}$:

$$g^{tt} = -1, \quad g^{rr} = \frac{1-kr^2}{a^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}$$

Það eru engir blandaðir liðir.

<u>Christoffel-táknin</u> : $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \{ g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \}$

* Einu táknin sem eru háð t eru :

$$\Gamma^{r}_{tr} = \Gamma^{\theta}_{t\theta} = \Gamma^{\phi}_{t\phi} = \frac{\dot a}{a} \qquad \left(\dot{} \equiv \frac{d}{dt} \right)$$

$$\Gamma^{t}_{rr} = \frac{a\dot a}{1-kr^2}$$

$$\Gamma^{t}_{\theta\theta} = r^2 a\dot a$$

$$\Gamma^{t}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \, a\dot a$$

* Hin eru :

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{kr}{1-kr^2}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta$$

* Öll önnur eru 0

<u>Ricci-sveigjuþinurinn</u> :

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\ \beta\alpha\nu} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad R_{tt} = -3\frac{\ddot a}{a}$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot a + 2\dot a^2 + 2k}{1-kr^2}$$

$$R_{\theta\theta} = r^2 (a\ddot a + 2\dot a^2 + 2k)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \, (a\ddot a + 2\dot a^2 + 2k)$$

<u>Ricci-sveigjutalan</u> :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \frac{(\ddot a a + \dot a^2 + k)}{a^2}$$

$$\Downarrow$$

<u>Einstein þinurinn</u> : $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

Þættir sem ekki eru 0 :

$$G_{tt} = 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}$$

$$G_{rr} = -(1-kr^2)^{-1} \left[2\ddot a a + \dot a^2 + k \right]$$

$$G_{\theta\theta} = -r^2 \left[2\ddot a a + \dot a^2 + k \right]$$

$$G_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2\theta \left[2\ddot a a + \dot a^2 + k \right]$$

II Orku-skriðþungatensorinn : $T_{\mu\nu}$

Um kjörvökva gildir að
(straumefni)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\, V_\mu V_\nu + P\, g_{\mu\nu} \qquad \left(\begin{matrix}\text{ath. að}\\ c=1\end{matrix}\right)$$

Í samfylgjandi hnitum er $\bar{U} = (1,0,0,0)$

$$\Downarrow$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(r^2a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(r^2\sin^2\theta\, a^2) \end{pmatrix}$$

III Sviðsjöfnur Einsteins verða þá:

$$\left(G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}\right)$$

$$3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} = 8\pi G \rho \qquad (tt\text{-jafnan})$$

$$-\left[2\ddot a a + \dot a^2 + k\right] = 8\pi G P a^2 \qquad \left(\begin{matrix} rr- \\ \theta\theta- \\ \phi\phi- \end{matrix}\right\}\text{jöfnur}\Big)$$

þessar þrjár jöfnur eru eins!

Umskrifum þessar tvær jöfnur á þægilegra form og fáum:

$$\boxed{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}} \qquad (A)$$

$$\boxed{2\left(\frac{\ddot a}{a}\right) = -\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} - 8\pi G P} \qquad (B)$$

Þetta eru sviðsjöfnur Einsteins fyrir FLRW-heima.

IV Orkuvarðveisla : $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta}T^{\alpha\mu}$$

$T_{\alpha\beta}$ er gefinn á bls. 5 og með því að nota hann fæst: $T^{00} = \rho$, $T^{11} = \frac{1-kr^2}{a^2}P$, $T^{22} = \frac{P}{r^2a^2}$

og $T^{33} = \frac{P}{r^2\sin^2\theta\, a^2}$ (Notum hér: $T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}T_{\mu\nu}$)

Reikningar sýna að aðeins tímaþátturinn $(\alpha = 0)$ er einhvers virði (hinir gefa hið sama):

$$\Downarrow$$

$$T^{0\beta}{}_{;\beta} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -P\frac{da^3}{dt}} \qquad (C)$$

Jöfnur FLRW-heimsins eru því:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \qquad (A)$$

$$2\left(\frac{\ddot a}{a}\right) = -\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} - 8\pi G P \qquad (B)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = -P\frac{da^3}{dt} \qquad (C)$$

Jöfnu (B) má umskrifa með hjálp (A) á formið

$$\boxed{\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3P\right) \qquad (B\text{II})}$$

Til þess að leysa jöfnurnar þarf <u>ástandsjöfnu</u>:

$$\boxed{P = P(\rho) \qquad (D)}$$

<u>Ath.</u> Ef $P = 0$ þá fæst jafna (A) með því að heilda jöfnu (B) (eða BII)

Kennistærðir

<u>Hubbles-stuðull</u> : $\boxed{H(t) = \frac{\dot a}{a}}$

<u>Markþéttleiki</u> : Skv. (A) er $\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2$ ef $k = 0$. Þetta er kallaður markþéttleikinn:

$$\boxed{\rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{3H^2}{8\pi G}}$$

<u>Þéttleikastuðull</u> : Ef ρ er þéttleiki heimsins þá er þéttleikastuðullinn gefinn með

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}}$$

Reikna má þéttleikastuðla fyrir hvern efnisþátt. Þá er

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots$$

þar sem $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots$

<u>Þrýstingsstuðull</u> : $\boxed{w = \frac{P}{\rho}}$ (sjá næsta kafla)

<u>Hröðunarstuðull</u> : $\boxed{q(t) = -\frac{\ddot a a}{\dot a^2}}$

Jöfnu (A) má umrita á formið

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}$$

svo ef

$k = +1$ (S^3) þá $\Omega > 1$

$k = 0$ $(\mathbb{R}^3)$ þá $\Omega = 1$ drallt

$k < 1$ (H^3) þá $\Omega < 1$

Í venjulegum einingum er

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1{,}9 \times 10^{-26}\, h^2 \ \mathrm{kg/m^3}$$

þar sem

$$h = \frac{H}{100\ \mathrm{km/s/Mpc}}$$

Einnig má reikna út svokallaðan

Hubbletíma : $\tau_H = \frac{1}{H} = 9{,}8 \times 10^9\, h^{-1}$ ár

og svokallaðan

Hubbles-radíus : $R_H = c\,\tau_H = 3{,}0\, h^{-1}$ Gpc

Þróun efnis og orku

Um þessar mundir er í tísku að skrifa ástandsjöfnuna (D) á forminu

$$P = w\rho \qquad (D)$$

þar sem w er venjulega hugsað sem fasti (en má breyta ef svo ber undir).

Með því að setja þetta inn í jöfnu (C) fæst

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -w\rho \frac{da^3}{dt}$$ ~~(tók kafla fasta c=1)~~

eða

$$\boxed{\frac{\dot\rho}{\rho} = -3(1+w)\left(\frac{\dot a}{a}\right)}$$

Ef w = fasti fæst lausnin:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}$$

venjulega er a_0 sett $= 1$ svo lausnin er

$$\rho(a) = \rho_0\, a^{-3(1+w)}$$

sem má nota til að lýsa ρ sem fall af a

Algeng dæmi:

Rykheimur : $w = 0$. Hér er P hverfandi miðað við ρc^2

$$\boxed{\rho_{ryk} \propto a^{-3}}$$

Geislunarheimur : $w = \frac{1}{3}$. Hér er $P = \frac{1}{3}\rho c^2$ sem á við um afstæðilegar agnir, t.d. ljóseindir

$$\boxed{\rho_{geislun} \propto a^{-4}}$$

Heimur með hulduorku : $w = -1$

Ef heimsfastinn er túlkaður sem orka skammtatómarúms (og þar sé um hulduorku að ræða) gildir:

$$P = -\rho_\Lambda c^2 \qquad \text{(spenna tómarúms)}$$

því er $\boxed{\rho_{hulduorka} = \rho_\Lambda}$, óháð a

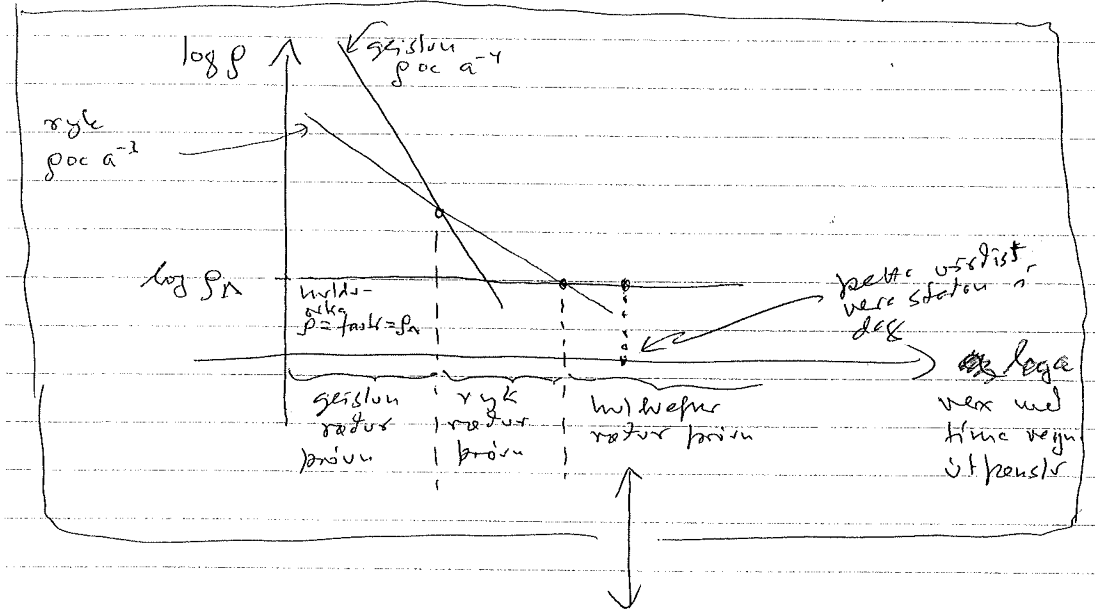
ρ_Λ er skilgreint útfrá Λ með

$$\boxed{\rho_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}}$$

Almennt má gera ráð fyrir að

$$\rho = \rho_{ryk} + \rho_{geislun} + \rho_{\Lambda}$$

Þá má auðveldlega sjá eftirfarandi þróun:



Hulduorka (eð. Λ) ræður því hvernig heimurinn þróast um þessar mundir og í framtíðinni.

Lausnir á sviðsjöfnunum

Lausn er í því fólgin að finna fallið $a = a(t)$ fyrir gefið heimslíkan.

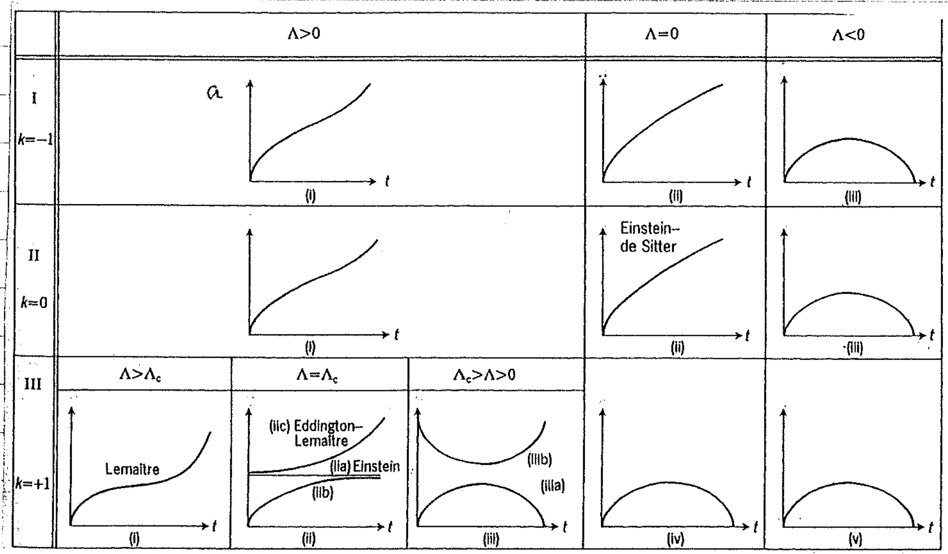
Sjá umfjöllun í 23. kafla í D'Inverno

Venjulega er byrjað á því að kanna lausnir fyrir heima með gefna sveigju:

$k = 0$ („flatur" heimur) $\Omega = 1$
$k = +1$ („jákvætt sveigður" heimur) $\Omega > 1$
$k = -1$ („neikvætt sveigður" heimur) $\Omega < 1$

Næst er flokkað eftir því hvort $P = 0$ eða ekki eða hvort $\Lambda = 0$ eða ekki:

$w = 0$: „rykheimur" ⎫
$w = \frac{1}{3}$: „geislunarheimur" ⎭ $\Lambda = 0$
$w = -1$: „heimur með hulduorku" } $\Lambda > 0$



①

Rauðvik og hinn sýnilegi heimur

* Rauðvik vegna útþenslunnar

Sjá kafla 22.10 hjá D'Inverno
og Heimadæmi nr. 2

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{lind} \leadsto \lambda_{em} & \cdots\cdots \xrightarrow{\text{ljóshraði} = c} \cdots \overset{\lambda_0}{\leadsto} & \text{athugandi} \\ t = t_{em} & & t = t_0 \\ a = a(t_{em}) & & a = 1 \end{array}}$$

Rauðvikið sem athugandi mælir er

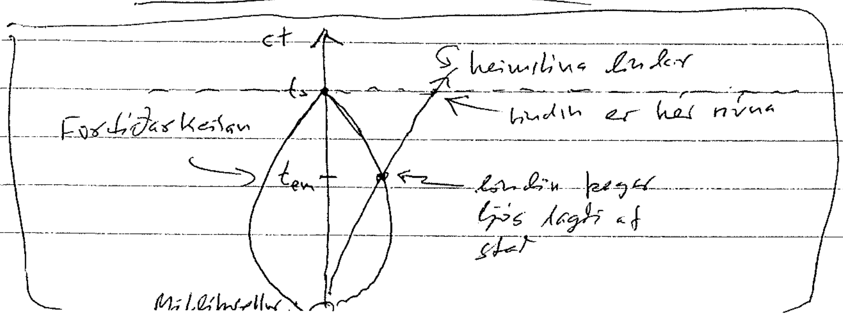
$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_0 - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} - 1$$

Svo $1 + z = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_{em}} > 1$ í heimi í útþenslu

Í heimsfræðum sem vekndar eru ofar á þessari bls, er sýnt fram á að $\dfrac{\lambda_0}{\lambda_{em}} = \dfrac{R_0}{R(t_{em})} = \dfrac{1}{a(t_{em})}$

Svo

$$\boxed{1 + z = \frac{1}{a(t_{em})}}$$



②

Hinn sýnilegi heimur = Fortíðarkeilan

metrinn fyrir eiginfjarlægð: $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) R_0^2 \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi)\, d\Omega^2 \right]$

(vegna hnitaskiptanna $R_0 r \to r$)

setjum $d\Omega^2 = 0$ til þægilda
þá er

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) R_0^2\, d\chi^2$$
$$= 0 \quad \text{fyrir ljós}$$

$$\Rightarrow \quad -d\chi = \frac{1}{R_0} \frac{c\,dt}{a} = \frac{c}{R_0} \frac{da}{\dot{a} a}$$

fortíðarkeilan

$$dz = -\frac{da}{a^2} = -H \frac{da}{\dot{a}a}$$

$$\Rightarrow \quad -\int_\chi^0 d\chi = \frac{c}{R_0} \int_{a(t_{em})}^1 \frac{da}{\dot{a}a} = \frac{c}{R_0} \int_z^0 \frac{-dz}{H(z)}$$

eða

$$\chi = \left(\frac{c}{R_0}\right) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

Nú er $H(t) = H_0 h(t)$ og $R_H = c/H_0$

Svo skrifa má

$$\boxed{\chi = \left(\frac{R_H}{R_0}\right) \int_0^z \frac{dz}{h(z)}} \Leftarrow \text{Jafna ljóskeilunnar}$$

Ath. að

$$r = S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh\chi, & k = -1 \end{cases}$$

Eiginfjarlægð: $d_p = R(t)\, \chi$

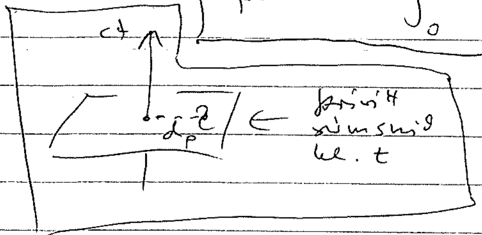
Fjarlægðir í FLRW-heimum

* Eiginfjarlægð (proper distance)

Á gefnum heimstíma t er eiginfjarlægð til sjáanlegrar lindar með rauðvik z gefin með

$$\boxed{d_p(t) = \int_0^{\chi} a(t) R_0 \, d\chi = a(t) R_0 \chi}$$

sbr. mælum

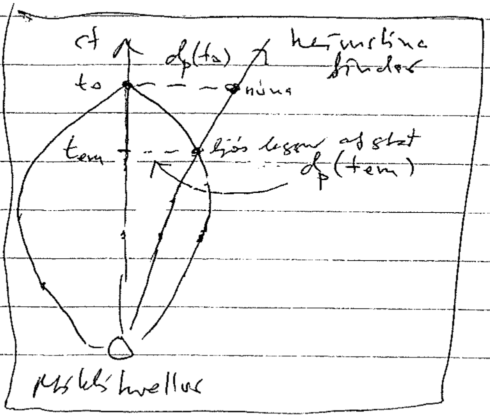


Þegar ljósið lagði af stað frá lindinni var eiginfjarlægðin því

$$d_p(t_{em}) = a(t_{em}) R_0 \chi$$

Þegar ljósið kemur til athugandans er eiginfjarlægðin hins vegar

$$d_p(t_0) = a(t_0) R_0 \chi = R_0 \chi$$



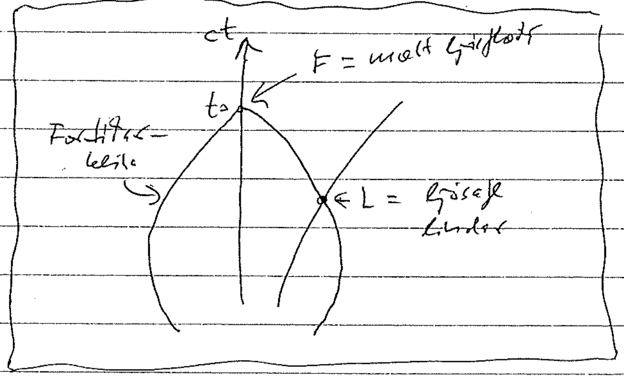
Svo

$$d_p(t_0) = a(t_0) R_0 \chi = R_0 \chi = \frac{d_p(t_{em})}{a(t_{em})} = \frac{1}{a(t_{em})} d_p(t_{em})$$

Þ.e.

$$\boxed{d_p(t_0) = (1+z)\, d_p(t_{em})}$$

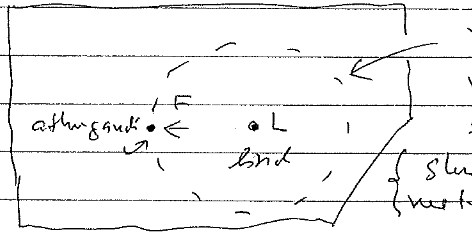
* Ljósaflsfjarlægð (luminosity distance)



$$F \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

skilgreinir ljósaflsfjarlægðina d_L:

$$\boxed{d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}}$$



Yfirborðsflatarmál kúlu með miðju í lind og sem nær til athuganda er $\left\{\begin{matrix}\text{sbr.}\\ \text{mælum}\end{matrix}\right\}$ $A = 4\pi R_0^2 S_\kappa^2(\chi)$

Ljósflæði hjá athuganda er því $F = \dfrac{L}{A(1+z)^2}$

rauðvik + (tíma)seinkun

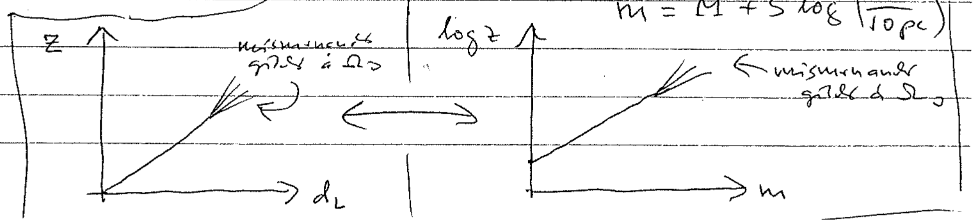
$$\Rightarrow \quad d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} = \left(\frac{A(1+z)^2}{4\pi}\right)^{1/2} = \left(R_0^2 S_\kappa^2(\chi)(1+z)^2\right)^{1/2}$$

Þ.e.

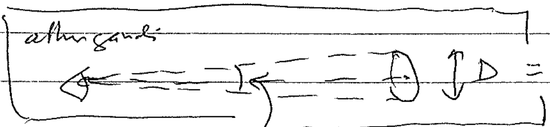
$$\boxed{d_L = (1+z) R_0 S_\kappa(\chi)}$$

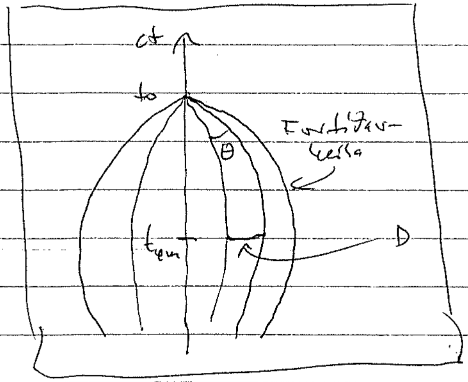
Hubbles-línurit:

$$m = M + 5 \log\left(\frac{d_L}{10\,\mathrm{pc}}\right)$$



* Sjónarþvermálsfjarlægð (angular diameter distance)





skilgreining á sjónarþvermálsfjarlægð d_A:

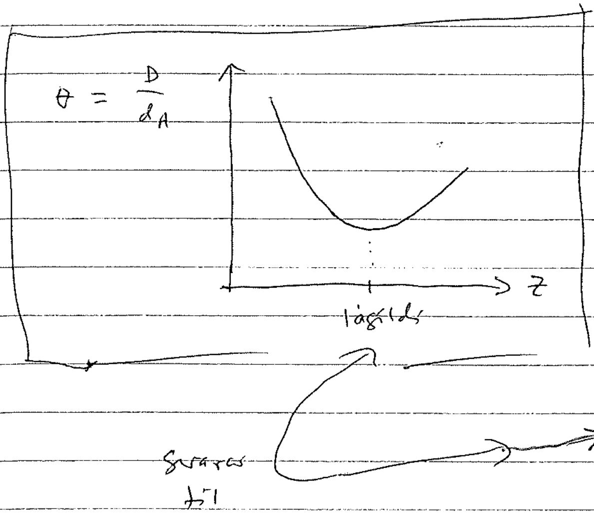
$$D \equiv d_A \theta$$

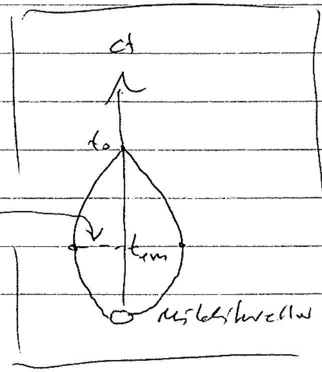
eða

$$\boxed{d_A = \frac{D}{\theta}}$$

Í kennslubókinni um AA er sýnt fram á að

$$\boxed{d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} = \frac{R_0 S_k(\chi)}{(1+z)}}$$





Af fjarlægðunum d_p, d_L og d_A er aðeins hægt að mæla d_L og d_A. d_p er ómælanleg stærð. Hins vegar gildir eftirfarandi:

(1) Skilgreinum eiginbreytihraða hlutar með

$$V_p = \frac{d}{dt}\left(d_p(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(a(t) R_0 \chi\right)$$

$$= \dot{a} R_0 \chi = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(a R_0 \chi\right) = H d_p$$

Svo jafnan

$$\boxed{V_p(t) = H(t)\, d_p(t)}$$

gildir ávallt!

(2) Með því að nota Taylornálgun fyrir $a(t)$ nálægt $t = t_0$ má auðveldlega sýna fram á að ljósaflsfjarlægð til hlutar er gefin með:

$$d_L = \left(\frac{c}{H_0}\right) z + O(z^2) = R_H z + O(z^2)$$

ef $z \ll 1$. Af þessari jöfnunni leiðir að

$$H_0 d_L = cz + O(z^2)$$

Dopplerviki í Newtonskri kenningu gefur bruthraðann $v = cz$ og því gildir fyrir lítil z:

$$\boxed{v = H_0 d_L} + O(z^2)$$

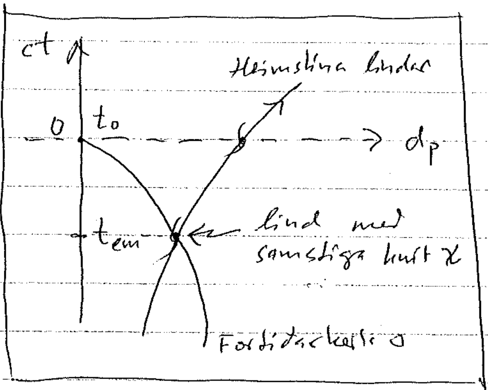
Ath: ef $z \ll 1$
$\Downarrow$
$d_L \approx d_A \approx d_p$

þessi jafna gengur venjulega undir nafninu Hubble-lögmál (gildir aðeins ef $z \ll 1$).

Sjóndeildir í FLRW-heimum

I. Agnasjóndeild (e. particle horizon)

Á tíma t_0 berst athuganda í O ljós frá lind með samstiga hnit χ. Ljósið lagði af stað kl. t_{em}. Þá er



$$\chi = \frac{c}{R_0}\int_{a(t_{em})}^{1}\frac{da}{a(t)} = \int_{t_{em}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)}$$

Eiginfjarlægðin til lindarinnar er

$$d_p(t_0) = R(t_0)\chi = R(t_0)\int_{t_{em}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)}$$

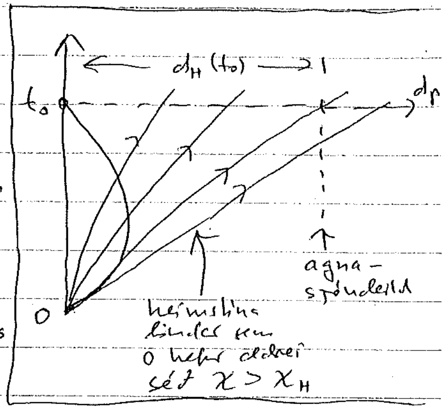
Gerum nú ráð fyrir að „upphaf heimsins" hafi átt sér stað kl. $t_{initial}$ ($=0$ í Miklahvells-líkönum, en gæti verið $=-\infty$ í öðrum líkönum). Þá er ljóst að kl. t_0 hefur athugandinn í O ekki enn fengið ljósmerki frá lindum með samstiga hnit $\chi > \chi_H$ þar sem

$$\boxed{\chi_H = \int_{t_{initial}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)}}$$

og tilsvarandi eiginfjarlægð kl. t_0 er

$$\boxed{d_H(t_0) = R(t_0)\chi_H = R(t_0)\int_{t_{initial}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)}}$$

Ef $\int_{t_{initial}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)}$ er endanleg stærð þá gildir um heimslíkanið að í fjarlægðinni $d_H(t_0)$ frá O er tvívítt yfirborð sem skiptir heiminum í tvennt: Innan yfirborðsins eru allir þeir staðir sem O hefur þegar séð, utan þess lindir (staðir) sem O hefur ekki enn séð. Þetta er svokölluð agnasjóndeild.



Öll FLRW-líkön með Miklahvelli, þ.e. með $R=0$ kl. $t_{initial}=0$, hafa agnasjóndeild. T.d.

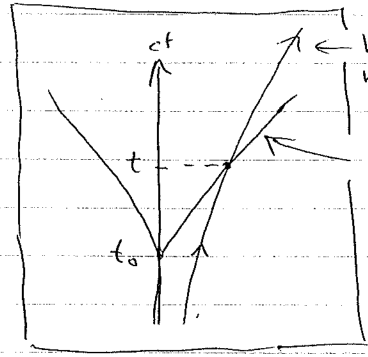
(i) Í rykheimi með $k = P = \Lambda = 0$ er $d_H(t_0) = 3ct_0$ (Tímadæmi 3)

(ii) Í geislunarheimi ($w = 1/3$) með $k = \Lambda = 0$ er $d_H(t_0) = 2ct_0$

Ef $\int_{t_{initial}}^{t_0}\frac{c\,dt}{R(t)} = \infty$, þá hefur O fengið ljósmerki frá öllum stöðum (lindum) kl. t_0. Í slíkum heimum er engin agnasjóndeild.

II. Skynmörk (e. event horizon)

Skoðum nú framtíðarkeilu O í stað fortíðarkeilu. Hugsum okkur að kl. t_0 sendi O út ljós í allar áttir. Það breiðist út og berst til æ fjarlægari staða:



Á tíma $t > t_0$ hefur ljósið náð til staða með samstiga hnit χ:

$$\chi = \int_{t_0}^{t} \frac{c\,dt}{R(t)}$$

Hugsum okkur nú að „heimurinn endi" kl. t_{final} (= ∞ í heimum sem halda áfram að þenjast út, = endanlegur tími í heimum sem hrynja saman). Þá er fjarlægasti staðurinn sem fær ljós frá O í fjarlægðinni

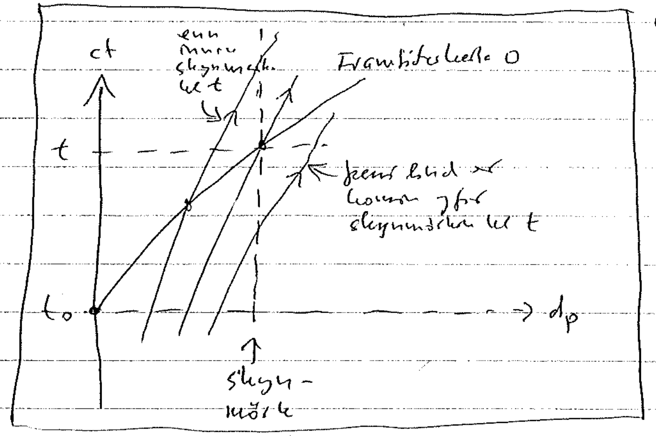
$$\boxed{\chi_E = \int_{t_0}^{t_{final}} \frac{c\,dt}{R(t)}}$$

Ljóst er að ef $\chi_E = \infty$ þá berst ljósið á endanum til allra staða. Ef χ_E er hins vegar endanleg stærð þá sjá staðir með $\chi > \chi_E$ aldrei ljós frá O. Þessu má snúa við:

Athugandinn O fær aldrei ljósmerki frá stöðum handan χ_E sem send eru af stað kl. t_0 eða síðar. Umhverfis O er því kúlulaga yfirborð sem skiptir veröldinni í tvennt: Innan þess eru staðir sem O nær að sjá einhvern tímann, lengra í burtu eru staðir sem O sér aldrei. Yfirborðið er í eiginfjarlægðinni

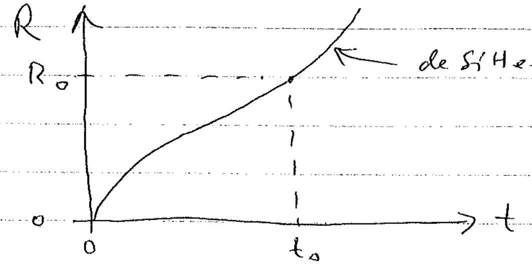
$$\boxed{d_E(t_0) = R(t_0)\,\chi_E = R(t_0)\int_{t_0}^{t_{final}} \frac{c\,dt}{R(t)}}$$

og kallast skynmörk. Ath. að d_E er fall af tíma t_0.



Heimur de Sitters

Heimurinn okkar: $\Omega_M \approx 0{,}3$, $\Omega_\Lambda \approx 0{,}7$



Líkan de Sitters (1917)

Flatt og tómt líkan með jákvæðum heimsfasta

$\boxed{k=0}$ $\boxed{\rho_M = 0}$ $\boxed{\Lambda > 0}$

$$\boxed{\rho_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}}$$

$$\boxed{P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2} \qquad (w=-1)$$

Jafna (BII):

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right)$$

$$= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_\Lambda + 3(-\rho_\Lambda)\right)$$

$$= \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{c^2\Lambda}{8\pi G}\right)$$

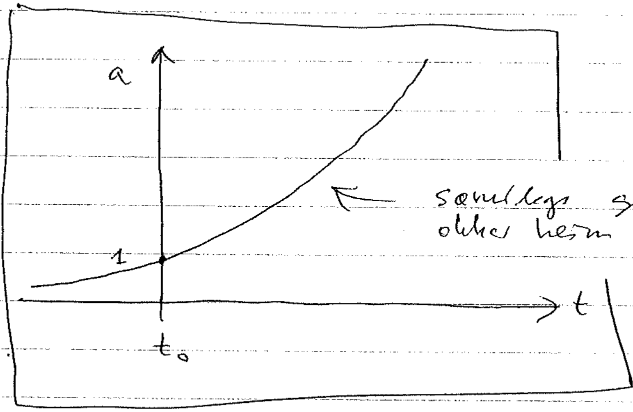
$$= \left(\frac{c^2\Lambda}{3}\right)$$

(BII): $$\frac{d^2a}{dt^2} = \left(\frac{c^2\Lambda}{3}\right) a$$

Lausn með skilyrði í jöfnunni

$$\boxed{a(t) = e^{(t-t_0)/t_\Lambda}}$$

þar sem $t_\Lambda = \left(\frac{3}{c^2\Lambda}\right)^{1/2}$ = fasti



sæmilega góð nálgun fyrir okkar heim fyrir $t \gtrsim t_0$

$$H = \frac{\dot a}{a} = \frac{\frac{1}{t_\Lambda}a}{a} = \frac{1}{t_\Lambda} = \left(\frac{c^2\Lambda}{3}\right)^{1/2} = \text{fasti}$$

$\Omega = 1$ $(k=0)$

$w = -1$

$$q = -\frac{\ddot a a}{\dot a^2} = -1$$

<u>Agnasjóndeild ?</u>

$$d_H(t_0) = R_0 \chi_H = R_0 \int_{-\infty}^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

$$= c \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(t-t_0)/t_H}\, dt$$

$$= -c t_H \left[e^{-(t-t_0)/t_H} \right]_{-\infty}^{t_0}$$

$$= c t_H \left[e^{+\infty} - 1 \right] = \infty$$

svo það er engin agnasjóndeild í de Sitter heimi !

<u>Skynmörk ?</u>

$$d_E(t_0) = R_0 \chi_E = R_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{c\,dt}{R(t)} = c \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)}$$

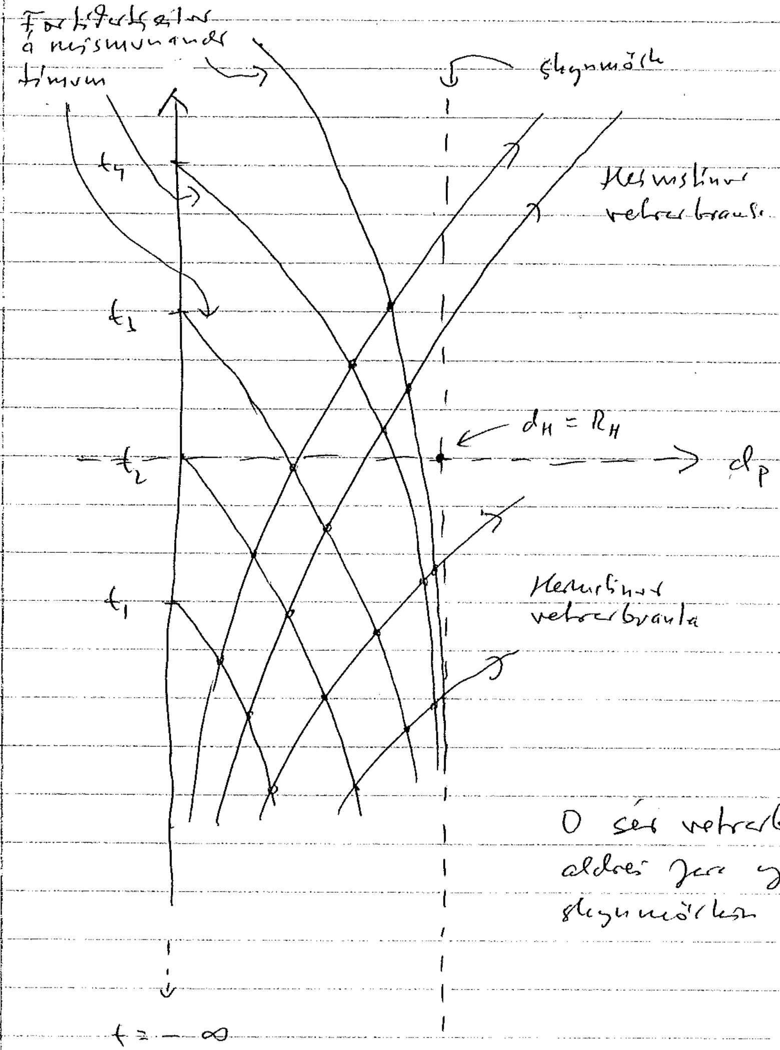
$$= -c t_H \left[e^{-(t-t_0)/t_H} \right]_{t_0}^{\infty}$$

$$= c t_H \left[1 - e^{-\infty} \right]$$

$$= c t_H = \frac{c}{H} = \underline{\underline{R_H}} = \text{fasti, óháð } t_0$$

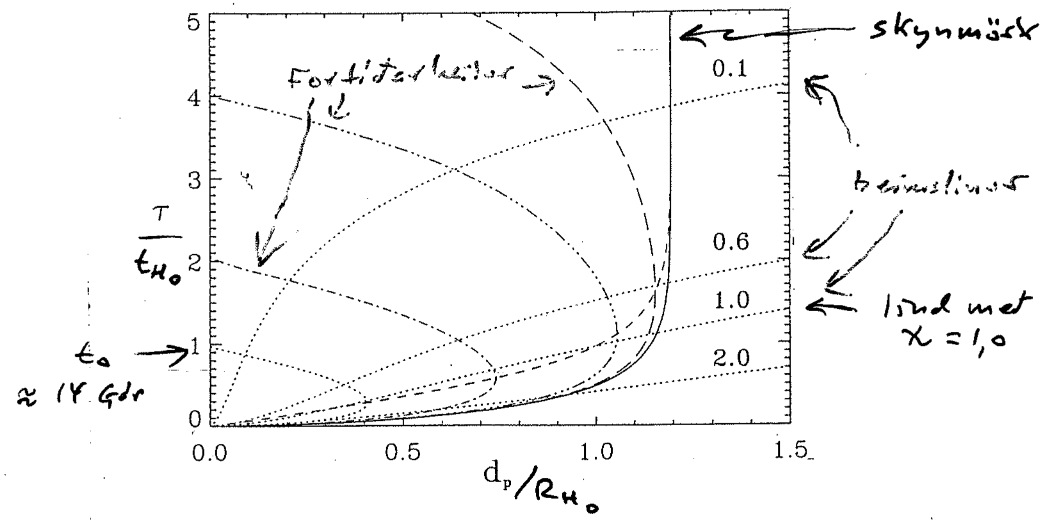
Svo de Sitter heimurinn hefur skynmörk !

<u>Fortíðarkeila O í de Sitter heimi</u>

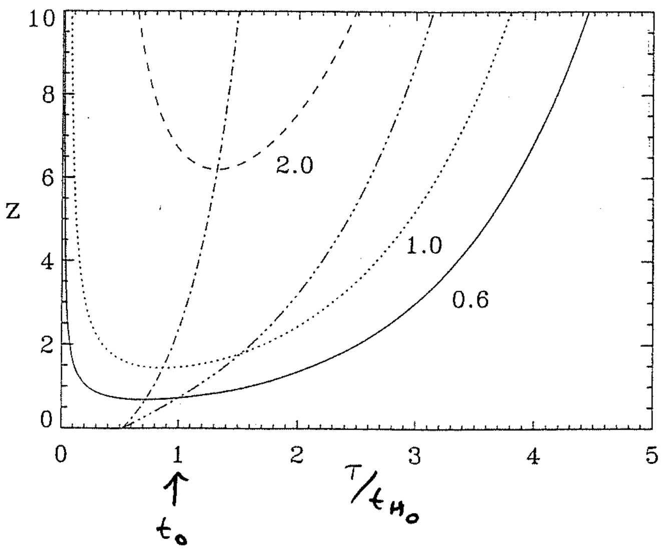


O sér vetrarbrautirnar aldrei fara yfir skynmörkin !

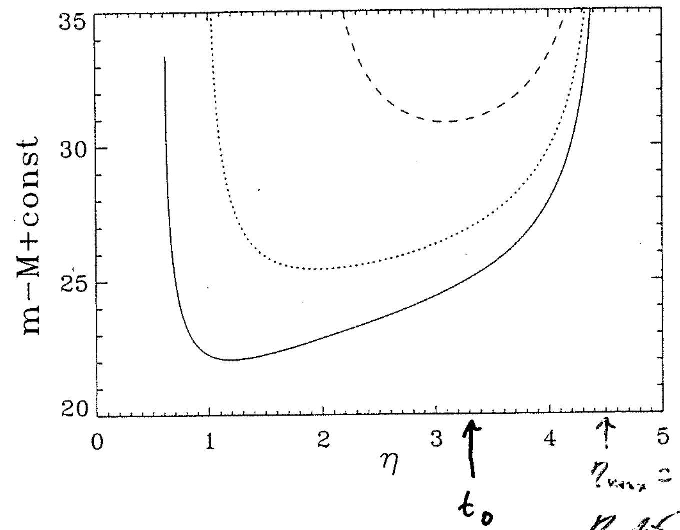
Heimurinn okkar : $\Omega_M \approx 0{,}3$, $\Omega_\Lambda \approx 0{,}7$
$h \approx 0{,}7$



RAUÐVIK :

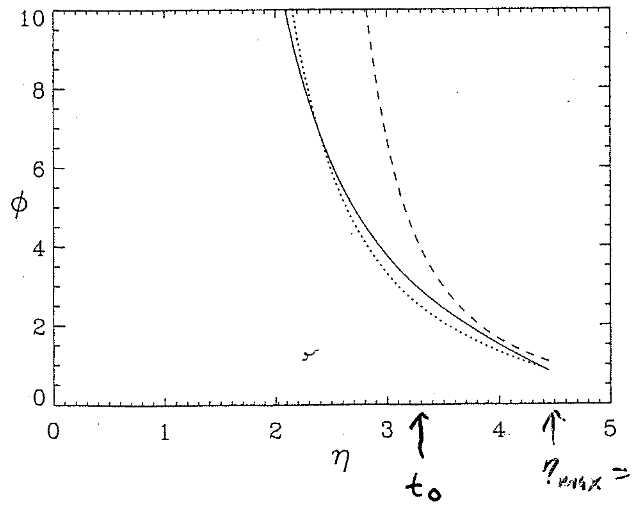


SÝNDARBIRTA :



$\eta_{max} \approx 4{,}5 \Leftrightarrow t = \infty$
η er hornréttur tími :
$d\eta = \frac{c\,dt}{R(t)}$

SÝNDARÞVERMÁL :



$\eta_{max} \approx 4{,}5 \Leftrightarrow t = \infty$